第1卷第1期
2002年

淮阴师范学院学报(自然科学版)
JOURNAL OF HUAIYIN TEACHERS COLLEGE (Natural Science Edition)

Vol.1 No.1
2002

Bernoulli 数模 2^r 和 3^r 的同余式

孙智宏

(淮阴师范学院 数学系, 江苏 淮安 223001)

摘 要: 设 $\{B_n\}$ 为 Bernoulli 数, m、n 为自然数, 本文证明了同余式 $(2-2^{2n})B_{2n}\equiv 1-4n+\sum_{k=1}^{m}\binom{2n}{2k}2^{4k}B_{2k}\pmod{2^{4m+3}}$ 与 $(3-3^{2n})B_{2n}\equiv 2-6n+2\sum_{k=1}^{m}\binom{2n}{2k}3^{2k}B_{2k}\pmod{3^{2m+1}}$. 取 $m=1,2$, 得到[5]中宣布的 $(2-2^{2n})B_{2n}\pmod{2^7}$ 与 $(3-3^{2n})B_{2n}\pmod{3^5}$ 的简单同余式.

关键词: Bernoulli 数; 同余式

中图分类号: O156.1 **文献标识码**: A **文章编号**: 1671-6876(2002)01-0013-03

1 引言

著名的 Bernoulli 数 $\{B_n\}$ 由如下初值和递推关系给出: $B_0=1$, $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0\ (n=2,3,4,\cdots)$. Bernoulli 数在数学中占有重要地位, 在数论、函数论、计算数学与组合数学中有极其广泛的应用. 目前关于 Bernoulli 数已有近 1600 篇文献, 详见[1].

本文的目的是研究 Bernoulli 数对模 2^r 和 3^r 的同余式. 设 n 为自然数, von Staudt 首先证明 $n\geqslant 2$ 时 $2B_{2n}\equiv 4n+1\pmod 8$, 1910 年 Frobenius[2] 进一步证明 $n>2$ 时 $2B_{2n}\equiv 1-12n\pmod{32}$. 本文用一非常简单的方法得到如下一般结果: 当 m、n 为自然数时有

$$(2-2^{2n})B_{2n}\equiv 1-4n+\sum_{k=1}^{m}\binom{2n}{2k}2^{4k}B_{2k}\pmod{2^{4m+3}} \tag{1}$$

特别取 $m=1$ 得到

$$(2-2^{2n})B_{2n}\equiv 48n^2+36n+1\pmod{2^7} \tag{2}$$

这是作者在[5]中首先宣布但未加证明的结果.

用类似的方法, 本文得到 m、n 为自然数时有

$$(3-3^{2n})B_{2n}\equiv 2-6n+2\sum_{k=1}^{m}\binom{2n}{2k}3^{2k}B_{2k}\pmod{3^{2m+1}} \tag{3}$$

取 $m=2$ 则得到[5]中宣布的如下同余式:

$$(3-3^{2n})B_{2n}\equiv -36n^4+108n^3-93n^2+18n+2\pmod{3^5} \tag{4}$$

2 基本引理

为证明(1) ~ (4), 我们先给出如下几个引理.

引理 1[3] 设 k 为自然数, 则

(i) $B_{2k+1}=0$;

(ii) (von Staudt-Claussen) 若 p 为素数, $2\mid k(p-1)$, 则有 $pB_{k(p-1)}\equiv -1\pmod p$.

收稿日期: 2001-11-18

基金项目: 江苏省教育厅自然科基金资助项目(98KJD110008)

作者简介: 孙智宏(1965-), 男, 江苏涟水人, 副教授, 硕士, 主要从事数论与组合数学研究.

引理 2[4] 设 n 为自然数，$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k$ 为 Bernoulli 多项式，则

$$B_{2n}(\frac{1}{3})=\frac{3-3^{2n}}{2\cdot 3^{2n}},\qquad B_{2n}(\frac{1}{4})=\frac{2-2^{2n}}{4^{2n}}B_{2n}.$$

引理 3 设 n 为自然数，则

(ⅰ) $(2-2^{2n})B_{2n}=1-4n+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k}4^{2k}B_{2k}$,

(ⅱ) $(3-3^{2n})B_{2n}=2-6n+2\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k}3^{2k}B_{2k}$.

证明 因 $B_1=-\frac{1}{2}$，故由引理1、引理2及 Bernoulli 多项式定义知

$$(2-2^{2n})B_{2n}=4^{2n}B_{2n}(\frac{1}{4})=4^{2n}\sum_{m=0}^{2n}\binom{2n}{m}(\frac{1}{4})^{2n-m}B_m$$

$$=\sum_{m=0}^{2n}\binom{2n}{m}4^mB_m=1-4n+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k}4^{2k}B_{2k}.$$

类似地，

$$(3-3^{2n})B_{2n}=2\cdot 3^{2n}B_{2n}(\frac{1}{3})=2\cdot 3^{2n}\sum_{m=0}^{2n}\binom{2n}{m}(\frac{1}{3})^{2n-m}B_m$$

$$=2\sum_{m=0}^{2n}\binom{2n}{m}3^mB_m=2-6n+2\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k}3^{2k}B_{2k}.$$

于是引理得证.

推论 设 n 为自然数，则

(ⅰ) $\frac{(2-2^{2n})B_{2n}-1}{4n}\equiv 12n-7 \pmod{16}$,

(ⅱ) $\frac{(3-3^{2n})B_{2n}-2}{3n}\equiv 2n-3 \pmod 9$.

证：由引理3可得

$$\frac{(2-2^{2n})B_{2n}-1}{4n}=-1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4n}\frac{2n}{2k}\binom{2n-1}{2k-1}4^{2k}B_{2k}$$

$$=-1+(2n-1)\cdot 4B_2+\sum_{k=2}^{n}\binom{2n-1}{2k-1}\frac{2^{4k-7}}{k}\cdot 2B_{2k}\cdot 2^4$$

$$\equiv -1+4(2n-1)B_2\equiv 12n-7 \pmod{16},$$

(注意到 $k\geqslant 2$ 时 $\frac{2^{4k-7}}{k}$ 及 $2B_{2k}$ 均为 2 - 整数.)

$$\frac{(3-3^{2n})B_{2n}-2}{3n}=-2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3n}\frac{2n}{2k}\binom{2n-1}{2k-1}3^{2k}B_{2k}$$

$$=-2+6(2n-1)B_2+2\sum_{k=2}^{n}\binom{2n-1}{2k-1}\frac{3^{2k-4}}{k}\cdot 3B_{2k}\cdot 3^2$$

$$\equiv -2+6(2n-1)B_2\equiv 2n-3 \pmod 9.$$

(注意到 $k\geqslant 2$ 时 $\frac{3^{2k-4}}{k}$ 及 $3B_{2k}$ 均为 3 - 整数.)

于是推论获证.

3 (1) ~ (4) 式的证明

设 k、m、n 为自然数，当 $k>m$ 时易见

$$\binom{2n}{2k}2^{4k}B_{2k}=\binom{2n}{2k}2^{4k-1}\cdot 2B_{2k}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2^{4m+3}),$$

故由引理3立得(1)式,在(1)式中取 $m=1$ 则得(2)式.又 $k>m$ 时有

$$\binom{2n}{2k}3^{2k}B_{2k}=\binom{2n}{2k}3^{2k-1}\cdot 3B_{2k}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3^{2m+1}),$$

故由引理3立得(3)式,在(3)式中取 $m=2$ 即得(4)式.

注　在[5]中作者证明过如下一般结果:设 p 为素数,n 为自然数,则存在整数 $a_0,a_1,\cdots a_n$ 使

$$(p-p^{k(p-1)})B_{k(p-1)}\equiv a_nk^n+\cdots+a_1k+a_0(\mathrm{mod}\ p^n)\quad (k=0,1,2,\cdots),$$

且 $p>n$ 时 $a_0,a_1,\cdots,a_n(\mathrm{mod}\ p^n)$ 唯一确定.不仅如此,当 $p=2$ 且 n 为奇数,或 $p>2$ 且 $p-1\nmid n$ 时可假定 $a_n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p^n)$.由此 $3\nmid n$ 时存在整数 $a_0,\cdots,a_{n-1}$ 使

$$(3-3^{2k})B_{2k}\equiv a_{n-1}k^{n-1}+\cdots+a_1k+a_0(\mathrm{mod}\ 3^n)\quad (k=0,1,2,\cdots).$$

关于其它相关研究,读者可参看[6].

参 考 文 献

[1] Dilcher K, Skula L, Slavutskii I Sh. Bernoulli Numbers Bibliography(1713-1990)[M]. Ontario: Kingston, 1991.

[2] Frobenius G, über die Bernoullischen zahlen und die Eulerschen Polynome[J]. S.B.Preuss. Akad.Wiss, 1910, 809-847.

[3] Ireland K, Rosen M. A Classical Introduction to Modern Number Theory[M]. New York: Springer, 1982, 228-248.

[4] Ribenboim P. 13 Lectures on Fermat's Last Theorem[M]. Springer, New York, 1979.

[5] Sun Z H(孙智宏). Congruences for Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials[J]. Discrete Mathematics, 1997, 163(1-3): 153-163.

[6] Sun Z H(孙智宏). Congruences concerning Bernoulli numbers and Bernoulli polynomials[J]. Discrete Applied Mathematics, 2000, 105(1-3): 193-223.

Bernoulli Numbers Modulo 2^r and 3^r

SUN Zhi-hong

(Department of Mathematics, Huaiyin Teachers College, Huaian 223001, China)

Abstract: Let $\{B_n\}$ be the Bernoulli numbers, and let m and n be natural numbers. In this paper we prove that $(2-2^{2n})B_{2n}\equiv 1-4n+\sum_{k=1}^{m}\binom{2n}{2k}2^{4k}B_{2k}\ (\mathrm{mod}\ 2^{4m+3})$ and $(3-3^{2n})B_{2n}\equiv 2-6n+2\sum_{k=1}^{m}\binom{2n}{2k}3^{2k}B_{2k}\ (\mathrm{mod}\ 3^{2m+1})$. Taking $m=1,2$ we obtain the two congruences for $(2-2^{2n})B_{2n}\ (\mathrm{mod}\ 2^7)$ and $(3-3^{2n})B_{2n}\ (\mathrm{mod}\ 3^5)$, which were announced in [5].

Key words: Bernoulli numbers; congruences

[责任编辑:胡　宏]